Le vocabulaire de la logique

Avant-propos : *en logique, on dit « proposition » plutôt que « phrase ».*

1. Le contre-exemple

Pour prouver qu'une proposition n'est pas « toujours » vraie, il suffit de déterminer un cas pour lequel elle n'est pas vraie. Un tel cas particulier est appelé un contre-exemple de la proposition.

Illustration :

1) Est-il vrai que pour tout nombre x positif, $x^2 \geq x$?

   La réponse est non. En effet, si $x = 0{,}5$, alors $x^2 = 0{,}25$ et donc, $x^2 < x$.
   Ainsi, la proposition « $x^2 \geq x$ » n'est pas vraie pour tout nombre x positif.
   Un seul cas convenablement choisi a suffi pour le prouver.
   Ce cas, ici $x = 0{,}5$, est un contre-exemple.

2) Est-il vrai que quels que soient les nombres positifs a et b, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

   La réponse est non ; il suffit pour le prouver de choisir a = 16 et b = 9.
   Dans ce cas, $\sqrt{a+b} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

2. La négation

La négation d'une proposition (P), notée non (P), est la proposition qui est fausse lorsque (P) est vraie et qui est vraie lorsque (P) est fausse.

Exemples :

- La proposition « $6 > 5$ » est vraie ; sa négation « $6 \leq 5$ » est fausse.
- La proposition « 2 x 3 = 5 » est fausse ; sa négation « 2 x 3 ≠ 5 » est vraie.

3. L'implication

3.1 Exemple

Examinons l'énoncé suivant : *« Si ABC est un triangle isocèle en A, alors les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ont la même mesure ».*

Il affirme ceci :
si la phrase (P) : *« ABC est un triangle isocèle en A »* est vraie, alors la phrase (R) : *« Les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ont la même mesure »* est vraie elle aussi.

On dit que (P) implique (R) et que l'énoncé examiné est une implication.

3.2 Cas général - Notations

Plus généralement, nous dirons que la proposition (P) **implique** la proposition (R) pour signifier que lorsque (P) est vraie, alors (R) est vraie, ou encore que (R) est une conséquence de (P).

Usuellement, l'implication se traduit par :

si (P) **alors** (R) ; (P) **donc** (R).

Exemple : si $\underbrace{\boxed{x = 2}}_{(P)}$ alors $\underbrace{\boxed{x^2 = 4}}_{(R)}$; $\boxed{x = 2}$ donc $\boxed{x^2 = 4}$

Notation : « (P) implique (R) » peut se noter (P) $\Rightarrow$ (R).

3.3 Des implications cachées

Parfois l'implication est implicite dans un énoncé. Ainsi, on énonce parfois :
« Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure » au lieu de :
« **Si** deux angles sont opposés par le sommet, **alors** ils ont la même mesure ».

3.4 Implications réciproques

Supposons qu'une proposition (P) implique une proposition (R). Nous pouvons toujours nous poser le problème de savoir si la **réciproque** est vraie, c'est-à-dire de savoir si (R) implique (P).

Exemples :

1) La proposition (P) : « $x = 2$ » implique la proposition (R) : « $x^2 = 4$ ».

La réciproque s'énonce ainsi : « Si x^2= 4, alors $x = 2$ ».

Cette réciproque est fausse, c'est-à-dire que (R) n'implique pas (P), car $(-2)^2 = 4$ et $-2 \neq 2$.

2) Si ABC est un triangle équilatéral, alors mes $\hat{A}$ = mes $\hat{B}$ = mes $\hat{C}$.
La réciproque s'énonce : « Si dans un triangle ABC les trois angles ont la même mesure, alors ABC est équilatéral ».
Dans ce cas, la réciproque est vraie.

3.5 La contraposée

- La **contraposée** de « si (P), alors (R) » est « si (**non** (R)), alors (**non** (P)) ».
- Une implication et sa contraposée sont toutes les deux vraies ou bien toutes les deux fausses.

Exemple :

La contraposée du théorème de Pythagore est :
« si dans un triangle ABC, $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A ».
La contraposée du théorème de Pythagore est utilisée pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

3.6 Condition nécessaire, condition suffisante

Lorsque l'implication « si (P), alors (R) » est vraie, on dit que :

- (P) est une **condition suffisante** pour (R) : **il suffit** que (P) soit vraie pour que (R) soit vraie ;
- (R) est une **condition nécessaire** pour (P) : si (P) est vraie, alors **nécessairement** (obligatoirement) (R) est vraie.

4. L'équivalence

4.1 Vocabulaire

On dit que deux propositions (P) et (R) sont **équivalentes** lorsque (P) implique (R) **et** que (R) implique (P).
Usuellement, l'équivalence se formule par :

- (P) **équivaut à** (R) ;
- (P) **si et seulement si** (R).

Remarque : *deux propositions équivalentes ont même valeur de vérité : soit elles sont toutes deux fausses, soit elles sont toutes deux vraies*.

4.2 Notation

L'équivalence entre (P) et (R) se note (P) $\Leftrightarrow$ (R).

Remarque : cette année, votre professeur utilisera l'abréviation « ssi » pour « si et seulement si ».

4.3 Exemple

Soient x et a deux nombres avec a strictement positif.
La phrase : « $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$ » doit se comprendre ainsi :
Si l'on sait que $x^2 = a$, alors on peut en déduire que $x = \sqrt{a}$ ou que $x = -\sqrt{a}$.
Et, si l'on sait que $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$, alors on peut en déduire que $x^2 = a$.

Sources :

- *Le vocabulaire de la logique* p. 329 à 331 du livre *Transmath 2de*, édition Nathan 2004, Paris, d'André Antibi, Raymond Barra, Jean Morin avec Jean-Michel Barros, Patrick Bénizeau, Bernard Destainville et Jean-Paul Roumilhac.
- *Vocabulaire de la logique* p. 292 à 294 du livre *Hyperbole 2de*, édition Nathan, avril 2010, de Joël Malaval, Denise Courbon, Anne Crouzier, Chantal Demetz, Pierre-Antoine Desrousseaux, Danièle Eynard, Franck Lambert, Hélène Lample, Jean-Marc Lécole, Marie-Christine Obert et Lionel Xavier.

Remarque : quelques modifications de ma part, notamment dans les parties 1., 3.1, 3.3 et 3.4.