Chapitre …

Les probabilités

Le cours

Avant-propos

a) Le mot *hasard* vient de l'arabe *az-zahr* « le dé ». Le mot *aléa* signifie en latin « jeu de dés, hasard ».

b) Dans son *Essai philosophique sur les probabilités* publié en 1814, le mathématicien Laplace (1749 - 1827) s'exprima ainsi : « *Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux* ».
Alors, le hasard existe-t-il ?

c) Le mathématicien d'Alembert (1717 - 1783), dans *l'Encyclopédie* (tome IV, 1754, article *croix ou pile*), commit une erreur étonnante. Au jeu de pile ou face, il prétendit qu'après avoir obtenu face trois fois de suite, face devenait moins probable au coup suivant…

d) « *Le calcul des probabilités se fonde et se développe sur la notion de probabilité a priori. Les probabilités a postériori ne peuvent que donner des approximations des premières et ne sont utilisées que lorsque les probabilités a priori ne sont pas connues. Ces approximations, une fois obtenues, sont traitées, au niveau des calculs, comme des probabilités a priori.* »
Jean-Claude Thienard, *À propos de l'enseignement du calcul des probabilités*, octobre 1993, IREM de Poitiers

Dans une urne, il y 3 boules blanches et 2 boules noires. Si on tire une boule au hasard, la probabilité de tirer une blanche est $\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$. C'est une probabilité *a priori*.

Étant donnée une punaise, on note A l'événement : « lors d'un lancé, la punaise tombe sur la pointe » et $\bar{A}$ le contraire. La probabilité p de A ne peut pas être connue a priori. On jette la punaise 500 fois, elle est tombée 347 fois sur la pointe, on prendra alors $p=\frac{347}{500}\approx 0{,}7$.
C'est une probabilité *a postériori*. Ce nombre sera alors utilisé dans toute question mettant en jeu cette punaise, comme une probabilité a priori. Néanmoins 0,7 n'est qu'une approximation de p inconnu.

1. Expériences aléatoires

Définitions

- Une expérience est dite *aléatoire* lorsque le hasard en rend le résultat incertain.
- On appelle *issue* (ou *éventualité*) d'une expérience aléatoire tout résultat de cette expérience.
- L'ensemble des issues est appelé *univers*.

Remarque. L'univers sera souvent noté $\boldsymbol{\Omega}$, qui se lit « oméga ».

Exemple. Le dé cubique équilibré

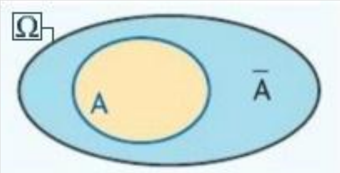
Le lancer d'un dé cubique équilibré constitue une expérience aléatoire avec 6 issues. L'univers peut être noté $\boldsymbol{\Omega} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$. L'utilisation d'*accolades* permet de faire référence à un *ensemble* d'issues.

2. Événements

2.1 Définitions

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

- Toute partie de l'univers est appelé un *événement* et le nombre d'éléments d'un événement est appelé son *cardinal*.
- Un événement qui contient une seule issue est appelé *événement élémentaire*.
- Un événement qui contient toutes les issues est un *événement certain*.
- Un événement qui ne contient aucune issue est un *événement impossible*.
- L'événement *contraire* de l'événement A, noté $\overline{\mathrm{A}}$, contient tous les éléments de $\boldsymbol{\Omega}$ qui n'appartiennent pas à A.



Remarques. 1) $\boldsymbol{\Omega}$ et $\emptyset$ sont réciproquement un événement certain et impossible.
2) Les événements sont souvent écrits *entre guillemets* et notés par une lettre majuscule.
3) $\bar{A}$ se lit « A barre ». $\bar{\bar{A}} = A$; $\bar{\Omega} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = \boldsymbol{\Omega}$.

Exemples. En reprenant l'exemple du 1. :

1) « Obtenir 1 » est un événement élémentaire.
2) « Obtenir 1 ou 3 » est un événement.
3) « Obtenir 7 » est un événement impossible.
4) « Obtenir un nombre pair ou impair » est un événement certain.
5) Les événements « obtenir un nombre pair » et « obtenir un nombre impair » sont contraires.

2.2 Intersection et réunion d'événements

Définitions

A et B sont deux événements, parties d'un même univers **Ω**.

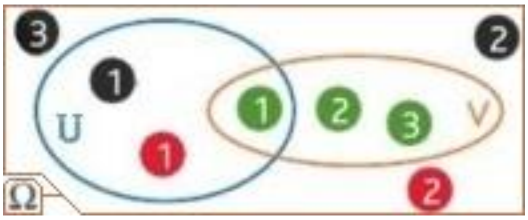
- L'*intersection* de ces deux événements est l'événement, noté $A \cap B$, qui est réalisé lorsque les événements A ***et*** B sont réalisés *simultanément*.
- La réunion des événements A et B est l'événement, noté $A \cup B$, qui est réalisé lorsque *l'un au moins* des événements A ***ou*** B est réalisé.

Remarques. 1) $A \cap B$ se lit « *A inter B* ».
2) $A \cup B$ se lit « *A union B* ».
3) $\bar{A} \cup A = \Omega$.

Exemple. Un sac contient 2 jetons rouges numérotés 1 et 2 (notés R_1 et R_2), 3 jetons verts numérotés 1,2 et 3 (notés V_1, V_2 et V_3) et 3 jetons noirs numérotés 1,2 et 3 (notés N_1, N_2 et N_3).

On tire au hasard un jeton et on considère les événements suivants :

- V : « tirer un jeton vert »
- U : « tirer un jeton numéroté 1 »
- R : « tirer un jeton rouge »

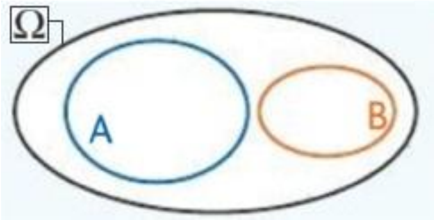


Alors $V \cap U$ contient un seul élément : $V \cap U = \{V_1\}$. De plus, $V \cup U$ contient 5 éléments :
$V \cup U = \{V_1 ; V_2 ; V_3 ; N_1 ; R_1\}$.

2.3 Événements incompatibles

Définition

A et B sont deux événements, parties d'un même univers **Ω**.
Ces événements A et B sont *incompatibles* lorsqu'ils ne peuvent pas avoir lieu en même temps, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$.



Remarque. Pour tout événement A , $\bar{A}$ et A sont incompatibles (en effet $\bar{A} \cap A = \emptyset$).

Exemple. Dans l'exemple du 2.2, V et R sont des événements incompatibles.

3. Définir une loi de probabilité

Soit **Ω** l'univers associé à une expérience aléatoire.
On suppose que **Ω** est non vide et fini.

Nous allons définir la probabilité d'un événement comme étant un réel de l'intervalle [0 ; 1].

Comment ? En respectant les axiomes suivants :

- La probabilité de **Ω** (événement certain) est 1.
- Celle de ∅ (événement impossible) est 0.
- Pour tout couple (A, B) *d'événements incompatibles*, la probabilité de l'événement $A \cup B$ est la somme des probabilités de chacun des événements A et B.

Supposons que card **Ω** = n (avec $n \geq 1$) et **Ω** = $\{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$.

Notons p_i la probabilité de l'événement élémentaire $\{e_i\}$ pour $1 \leq i \leq n$. Ces événements élémentaires sont deux à deux incompatibles et leur réunion est **Ω**. D'après les axiomes précédents,
$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

3.1 Propriétés

- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.
- Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Pour tous événements A et B, $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
- Comme $P(A \cap B) \geq 0$, $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
- Pour tout événement A, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

3.2 Probabilité et fréquence

Si on répète une expérience aléatoire dont les issues sont $\{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_r\}$ un nombre n de fois, alors

- les fréquences d'apparition des e_i vérifient $f_1 + f_2 + \dots + f_r = 1$ (avec $0 \leq f_i \leq 1$ pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \dots ; r\}$)
- si n devient grand, les fréquences f_i se « stabilisent » autour de la probabilité p_i (loi des grands nombres).

Exemple. On jette un dé cubique équilibré cent fois. Si le chiffre 1 apparaît douze fois, sa fréquence de sortie est $f_1 = \frac{12}{100} = 0{,}12$. Nous avons $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 1$. Si le nombre de lancers devient grand, les fréquences se « stabilisent » autour de $\frac{1}{6}$, probabilité d'apparition de 1.

Remarque. Dans certains cas, on utilise la loi des grands nombres pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.

3.3 Situations d'équiprobabilité

3.3.1 Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers **Ω**.
On est dans une situation d'*équiprobabilité* lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables, c'est-à-dire lorsqu'ils ont tous la même probabilité.

Exemple. Pour le lancer d'un dé cubique équilibré, chaque face ayant la même probabilité d'apparaître, on est dans une situation d'équiprobabilité.

3.3.2 Propriétés

On considère une expérience aléatoire d'univers **Ω** contenant n issues équiprobables.
Dans cette situation :

- La probabilité de tout événement élémentaire est égale à $\frac{1}{n} = \frac{1}{card\ \Omega}$
- Pour tout événement A de **Ω**, la probabilité de l'événement A est :

$$P(A) = \frac{nombre\ \ d'issues\ favorables\ \ à\ \ A}{nombre\ \ d'issues\ \ possibles\ \ dans\ \ \Omega} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

4. Probabilités conditionnelles

Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers **Ω** et un événement B tel que $P(B) \neq 0$.
Pour tout événement A, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B*, notée $P_B(A)$,
le nombre $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Remarques. 1) Cette égalité peut s'écrire P(A∩B) = P(B) x $P_B(A)$ et nous obtenons la probabilité de l'intersection des événements A et B.

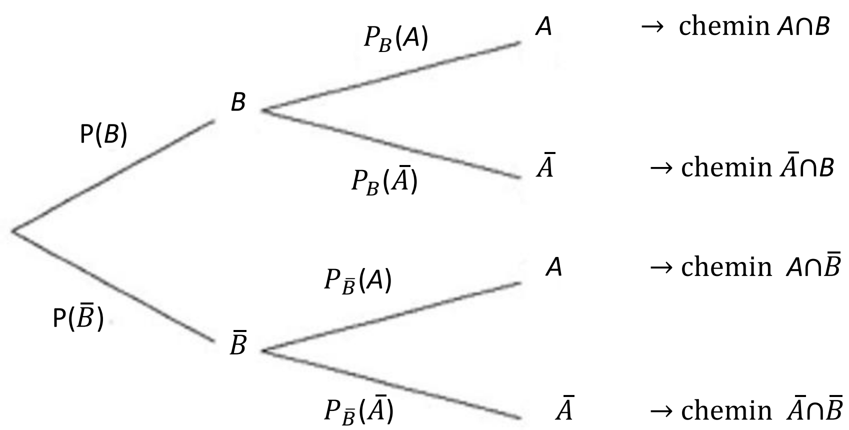
2) **Si de plus P(A) ≠ 0**, alors P(B) x $P_B(A)$ = P(A) x $P_A(B)$.

Preuve. On suppose que P(A) ≠ 0. Donc P_A(B) = $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. D'où P(A∩B) = P(A) x $P_A(B)$. Avec la remarque 1), on conclut bien à l'égalité.

5. Arbre de probabilités

Dans l'univers **Ω** d'une épreuve aléatoire, on considère un événement B *de probabilité différente de 0 et de 1*.
Étant donné un événement A conditionné par l'événement B, on visualise la situation à l'aide d'un *arbre de probabilités* :

- une *branche* est représentée par un segment ; chacune porte une probabilité ;
- un *nœud* est la jonction de deux ou plusieurs branches ;
- un *chemin* est l'événement réalisé en suivant des branches successives.



On a remarqué que $P_B(A) + P_B(\bar{A}) = 1$.

La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un *même* nœud est égale à 1.
Cela reste valable lorsqu'il y a plus de deux branches issues d'un même nœud.

On a vu que P(A∩B) = P(B) x $P_B(A)$.

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches.

L'événement A étant la réunion des *deux événements incompatibles* $A\cap B$ et $A\cap\bar{B}$, on a
P(A) = P(A∩B) + P($A\cap\bar{B}$) = P(B) x $P_B(A)$ + P($\bar{B}$) x $P_{\bar{B}}(A)$.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Remarque. On dit qu'un tel arbre est à branches pondérées.

6. Indépendance de deux événements

6.1 Définition

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère des événements A et B.
On dit que A et B sont des *événements indépendants* lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
On dit que deux événements sont *dépendants* lorsqu'ils ne sont pas indépendants.

6.2 Propriété

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère des événements A et B avec $P(B) \neq 0$.
A et B sont *indépendants* équivaut à $P_B(A) = P(A)$.

Preuve. En supposant $P(B) \neq 0$,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$$

La probabilité de A est la même avec ou sans la condition que B se réalise.

Remarque. Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles. Deux événements incompatibles sont, en général, dépendants.

6.3 Exemple

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on considère les événements
A : « obtenir pile au premier lancer » et B : « obtenir deux résultats identiques ».

Avec Ω = { pp ; pf ; fp ; ff }, nous avons A = { pp ; pf }, B = { pp ; ff } et $A \cap B$ = { pp }.

D'où les probabilités de ces trois événements :

$P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

On constate que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc A et B sont indépendants.

7. Formule des probabilités totales

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements tels qu'ils sont deux à deux incompatibles et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.
On dit que ces événements forment un *système complet d'événements* (ou encore une *partition* de Ω
si $A_k \neq \emptyset$ pour tout $k \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$).

Formule des probabilités totales :

Si B est un événement quelconque, alors $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$.
De plus, lorsque $P(A_k) \neq 0$ pour tout $k \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$,

$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) = \sum_{k=1}^{n} (P(A_k) \times P_{A_k}(B))$

8. Modélisation d'expériences indépendantes

8.1 Cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes

Voir l'exercice 7, ainsi que l'exercice 9 question 1.

8.2 Autres cas

Voir l'exercice 10.

8.3 Cas général

On conviendra, en conformité avec l'intuition, que pour des expériences indépendantes, la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

9. Variable aléatoire et loi de probabilité

9.1 Définition

Lorsqu'à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une *variable aléatoire*.

Remarques. 1) Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule X, Y, Z, …
2) Lorsque a_1, a_2, …, a_n sont les valeurs prises par une variable aléatoire X, on note $(X = a_i)$ l'événement « X prend la valeur a_i » avec $1 \leq i \leq n$.

9.2 Loi de probabilité de X

Lorsqu'à chaque valeur a_i (avec $1 \leq i \leq n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'événement $(X = a_i)$, on dit que l'on définit *la loi de probabilité de X*.

On peut présenter cette loi à l'aide d'un tableau. Notez que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Valeur a_i	a_1	a_2	…	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	…	p_n

9.3 Exemple

On lance une pièce de monnaie non équilibrée. La probabilité d'apparition du côté PILE est égale à 0,4 et celle du côté FACE à 0,6. On gagne 1€ si PILE sort, on perd 1€ si FACE sort.
On associe à chacun des événements élémentaires le gain, en euros, positif ou négatif, correspondant. Précisez la loi de probabilité de la variable aléatoire, notée X, ainsi définie.

Solution

Il y a deux événements élémentaires : « Obtenir PILE » et « Obtenir FACE ». En associant à chacun d'eux un nombre, on définit une variable aléatoire. La variable aléatoire X prend deux valeurs : 1 et – 1.

P(X = 1) est la probabilité d'obtenir PILE. Donc P(X = 1) = 0,4.
P(X = – 1) est la probabilité d'obtenir FACE. Donc P(X = – 1) = 0,6.

On comprend intuitivement, dans un tel jeu, qu'au bout d'un grand nombre de parties le joueur est perdant.

10. Espérance, variance et écart-type

10.1 Espérance mathématique

Définition

Considérons une variable aléatoire X qui prend les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = a_1 \times P(X = a_1) + a_2 \times P(X = a_2) + \ldots + a_n \times P(X = a_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i \times P(X = a_i))$$

Remarque. L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

10.2 Variance et écart-type

Définition

Considérons une variable aléatoire X qui prend les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

- La *variance* de X est le nombre, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = (a_1 - E(X))^2 \times P(X = a_1) + (a_2 - E(X))^2 \times P(X = a_2) + \ldots + (a_n - E(X))^2 \times P(X = a_n) = \sum_{i=1}^{n}((a_i - E(X))^2 \times P(X = a_i))$$

- L'*écart-type* de X, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques. 1) On a toujours $V(X) \geq 0$; on peut donc calculer $\sqrt{V(X)}$.
2) La variance $V(X)$ est la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

3) Autre formule : $V(X) = \sum_{i=1}^{n}(a_i^{\ 2} \times P(X = a_i)) - (E(X))^2$

11. Loi de Bernoulli. Loi binomiale

11.1 Loi de Bernoulli

Définition

Si lors d'une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S (appelé « succès ») ou à sa non réalisation $\bar{S}$ (appelé « échec »), on dit qu'il s'agit *d'une épreuve de Bernoulli*. De plus, si $P(S) = p$, on dit une *épreuve de Bernoulli de paramètre* p.

Exemple. On lance un dé équilibré à six faces, les faces étant numérotés de 1 à 6. On considère qu'il y a un succès lorsque le résultat du lancer est un 2, un échec sinon. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

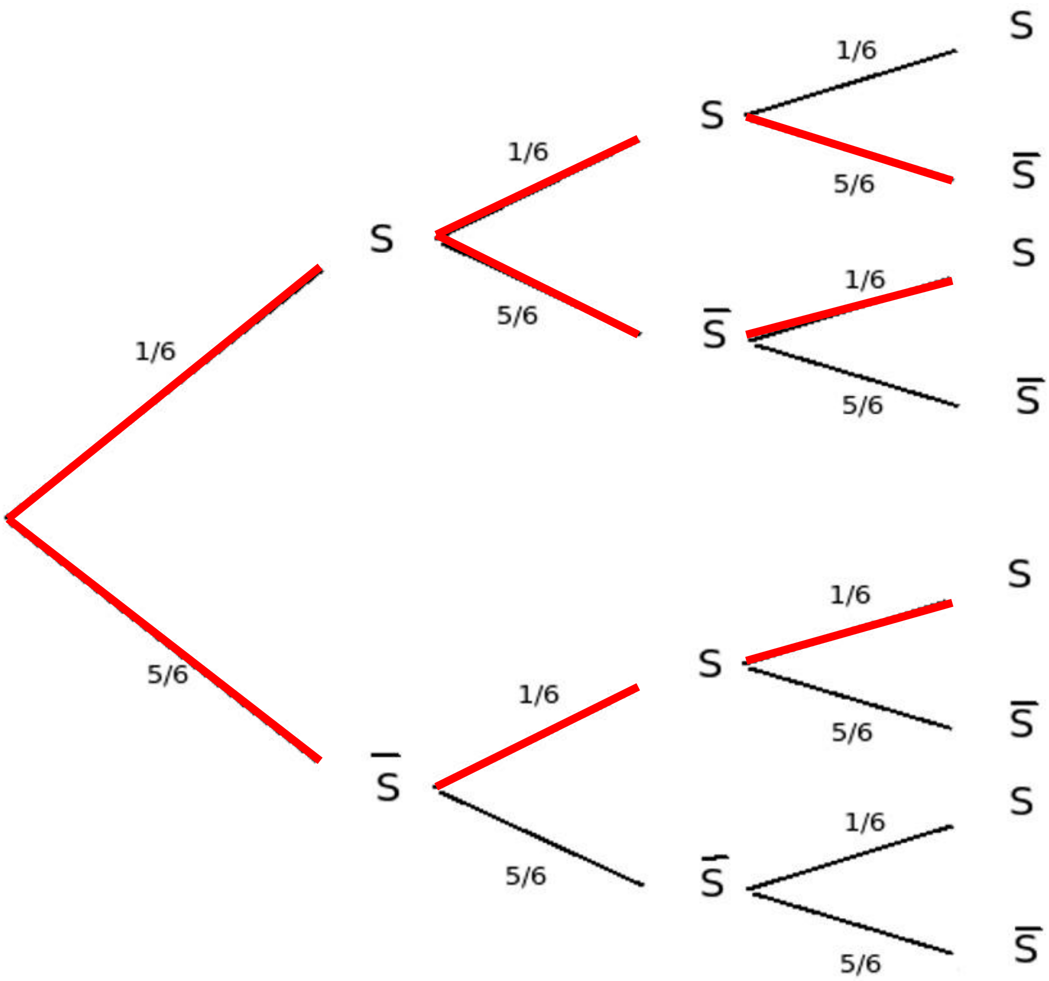
En effet, P(S) = $\frac{1}{6}$. L'échec $\bar{S}$ est donc l'événement « le 2 ne sort pas » et P($\bar{S}$) = 1 - P(S) = $\frac{5}{6}$.

11.2 Expérience de Bernoulli. Loi binomiale

Définition

- Une expérience de Bernoulli d'ordre *n* est la répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
- La loi binomiale de paramètres *n* et *p* est la loi de probabilité de nombre de succès (S) obtenus au cours d'une expérience de Bernoulli d'ordre *n* à partir d'une épreuve de Bernoulli de paramètre *p*.

Exemple. On lance trois fois de suite un dé équilibré à 6 faces et on s'intéresse au nombre de 2 obtenus. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$ et on la répète 3 fois de manière indépendante. On veut donc déterminer la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{6}$. Cette expérience est représentée par l'arbre ci-dessous :



Une issue de cette expérience est une liste.

- L'événement A : « n'obtenir aucun 2 » ne contient que la liste $(\bar{S}\,;\ \bar{S}\,;\ \bar{S})$. D'après le principe multiplicatif, $P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = (\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216}$.
- L'événement B : « obtenir que des 2 » ne contient que la liste $(S\,;\,S\,;\,S)$. D'après le principe multiplicatif, $P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$.
- L'événement C : « obtenir un seul 2 » contient les listes $(S\,;\ \bar{S}\,;\,\bar{S})$, $(\bar{S}\,;\,S\,;\,\bar{S})$ et $(\bar{S}\,;\,\bar{S}\,;\,S)$.
  On a $P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = 3 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^2 = \frac{75}{216}$
- On note D l'événement « obtenir à deux reprises le chiffre 2 ». On a

  $P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = \frac{15}{216}$.

  On obtient donc la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{6}$, résumée par le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3
Probabilité	$(\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216}$	$3 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^2 = \frac{75}{216}$	$3 \times (\frac{1}{6})^2 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$	$(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$
	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

Notations

La loi binomiale de paramètres n et p est notée : $\mathcal{B}$ **(n, p)**

Dans l'exemple précédent, si X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès, alors

$P(X = 0) = (1 - p)^3$

$P(X = 1) = 3p(1 - p)^2 = 3\,(1 - p)^2\,p$

$P(X = 2) = 3p^2(1 - p) = 3(1- p)p^2$

$P(X = 3) = p^3$

L'événement (X = 2) est associé aux chemins rouges dans l'arbre. Il y en a 3.

Ce nombre de chemins est noté $\binom{3}{2}$ et est appelé *coefficient binomial.*

$\binom{3}{2}$ ← nombre de répétitions ; ← nombre de succès

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès. Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés *coefficients binomiaux.* *On lit « k parmi n »*

Vous pouvez déterminer ces coefficients avec votre calculatrice (Casio, p. ……… ; Texas, p. ……….) ou à l'aide du triangle de Pascal.

Formule de la loi binomiale

(théorème à admettre)

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n, p), alors :

pour tout entier k = 0, 1, 2, …, n,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Vous pouvez déterminer ces probabilités avec votre calculatrice (Casio, p. ……… ; Texas, p. ……….)

Espérance et variance de la loi binomiale

(théorème à admettre)

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n, p) , alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.