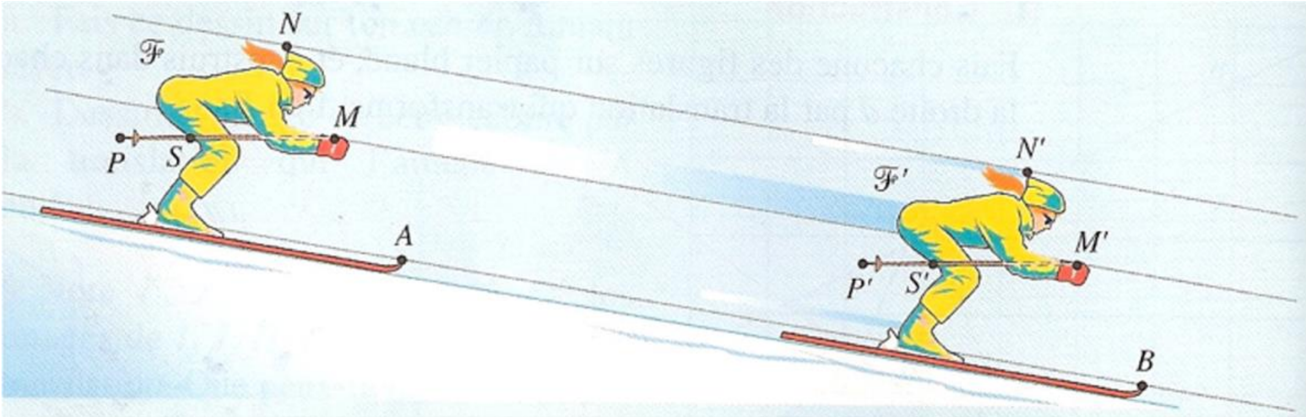
Chapitre …..

Parallélogrammes. Translations. Vecteurs.

Le cours

1. Approche expérimentale

Par un « glissement rectiligne » de A en B, la figure $\mathscr{F}$ vient se superposer à la figure $\mathscr{F}'$. On dit que la figure $\mathscr{F}$ a pour image la figure $\mathscr{F}'$ par **la translation qui transforme A en B.**



$(MM') // (AB)$; $(NN') // (AB)$; $(PP') // (AB)$; $(SS') // (AB)$; $MM' = NN' = PP' = SS' = AB$

2. Image d'un point par une translation

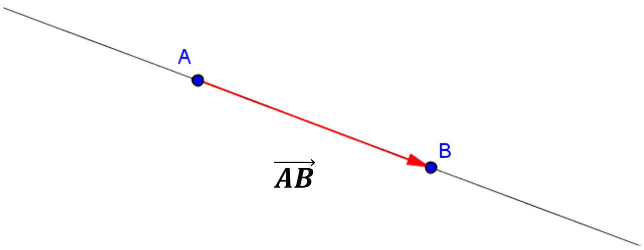
2.1 Première définition

Soient A et B deux points distincts.

La translation qui transforme A en B s'appelle « **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** ».

Ce **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ symbolise le déplacement de A vers B ; on le représente par une flèche allant de A jusqu'à B. Il est caractérisé par :

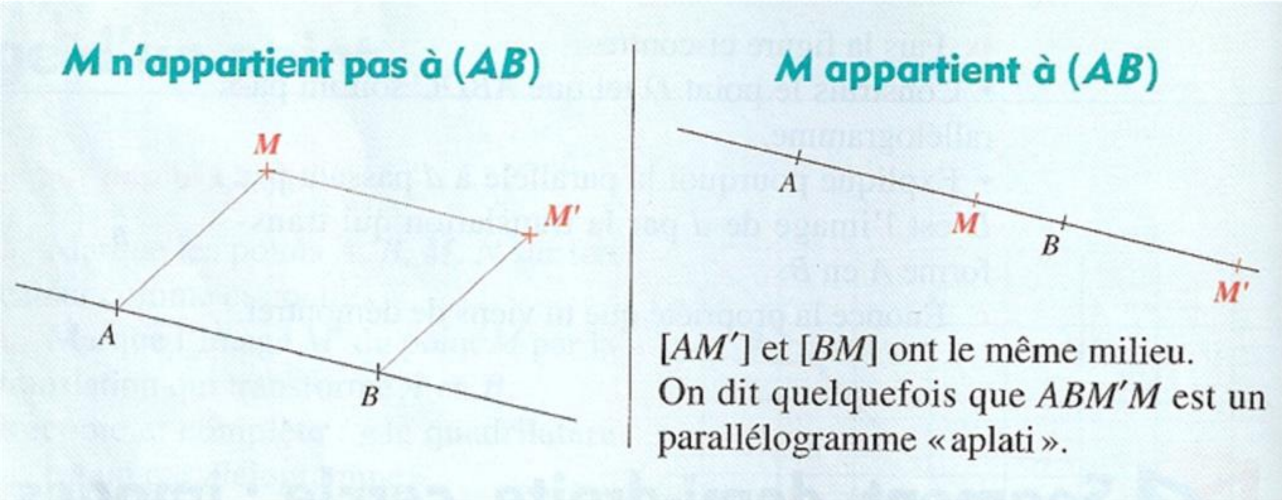
- sa *direction* : celle de la droite (AB) ;
- sa *longueur* : AB ;
- son *sens* : de A vers B.



2.2 Deuxième définition

Soient A et B deux points distincts du plan.

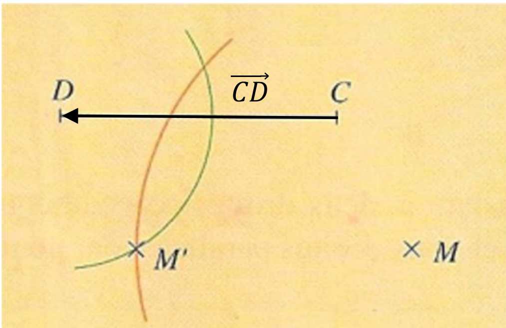
Dire que M a pour image M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, signifie que $ABM'M$ est un parallélogramme.



© Collection *Transmath* 4 e, éditions Nathan, Paris, 1998, p. 158.

2.3 Construire l'image d'un point avec le compas

Soient C, D et M trois points non alignés du plan.
Construire l'image M' du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ revient à construire le quatrième sommet du parallélogramme $CDM'M$.



© Collection *Transmath* 4 e, éditions Nathan, Paris, 1998, p. 160.

1. On trace l'arc de cercle rouge de centre M et de rayon CD.
2. On trace l'arc de cercle vert de centre D et de rayon CM.
3. On note M' le point d'intersection des arcs de cercle, qui est du même côté que le point M par rapport à la droite (CD).

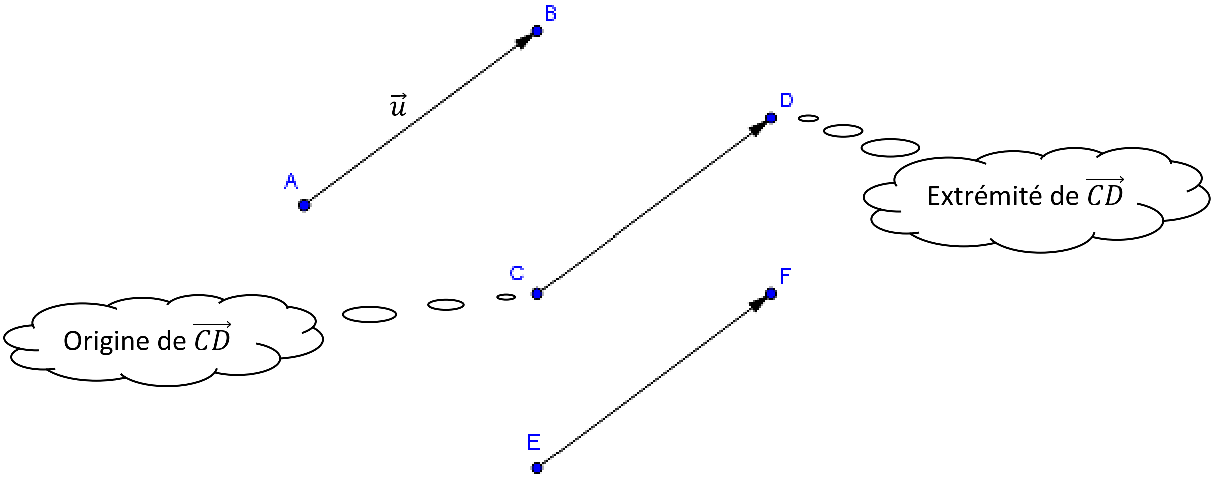
3. Propriétés des translations

- Dans une translation, les longueurs, les aires, le parallélisme, l'orthogonalité et plus généralement la mesure des angles sont conservés.
- Par une translation, une droite d a pour image une droite d' parallèle à d.

4. Égalité de vecteurs

4.1 Définition

On dit que deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.



On note : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

Pour représenter un vecteur $\vec{u}$, nous pouvons choisir n'importe quel point pour origine.
La translation qui transforme A en B sera la translation de vecteur $\vec{u}$.

Vecteurs particuliers :

- Le **vecteur nul** $\vec{0}$: pour tout point M, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$
- Le **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur ayant la même direction et la même longueur que $\overrightarrow{AB}$ mais un sens opposé. C'est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$. On note : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

4.2 Propriété

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow D$ est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme

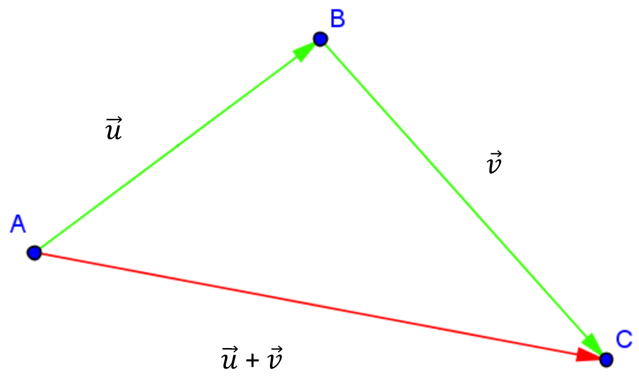
$\Leftrightarrow [AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu

5. Somme de deux vecteurs

Définition

Soient A, B et C trois points.

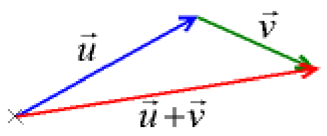
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de la translation t obtenue en appliquant successivement la translation t_1 de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ puis la translation t_2 de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ est appelé le **vecteur somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$**. On écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette égalité s'appelle la **relation de Chasles**.



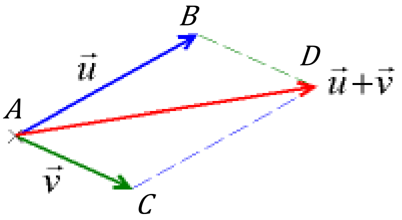
Remarque. Nous avons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Construction de la somme de deux vecteurs : deux cas

L'extrémité de l'un est aussi l'origine de l'autre (ce qui correspond à la définition).



Les deux vecteurs ont même origine.

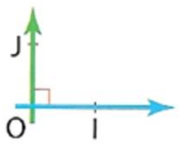


La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

6. Dans un repère du plan

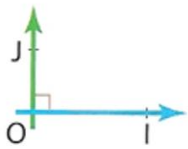
6.1 Trois types de repères notés (O; I, J)

Repère orthonormé



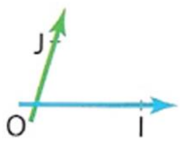
- (OI) ⊥ (OJ).
- OI = OJ, unité de longueur choisie dans le plan.

Repère orthogonal



- (OI) ⊥ (OJ).

Repère quelconque



Définition

Soient (O; I, J) un repère du plan, $\vec{u}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$.

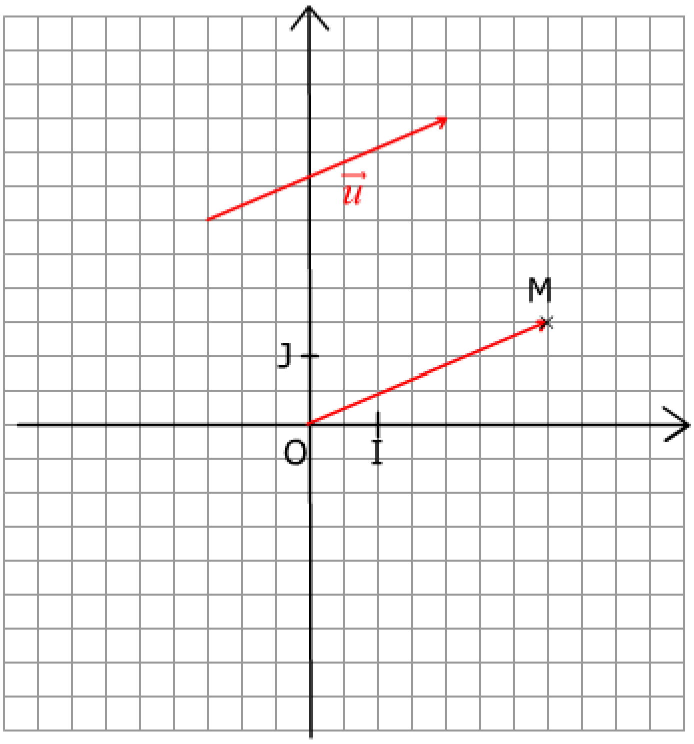
Par la translation de vecteur $\vec{u}$, le point O se transforme en M.

On appelle ***coordonnées du vecteur*** $\vec{u}$ les coordonnées du point M dans le repère (O; I, J).

On note $M(x\,;\,y)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. De plus, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ est noté $k\vec{u}$.

On admettra que le vecteur $k\vec{u}$ ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.

Exemples.



6.2 Propriétés

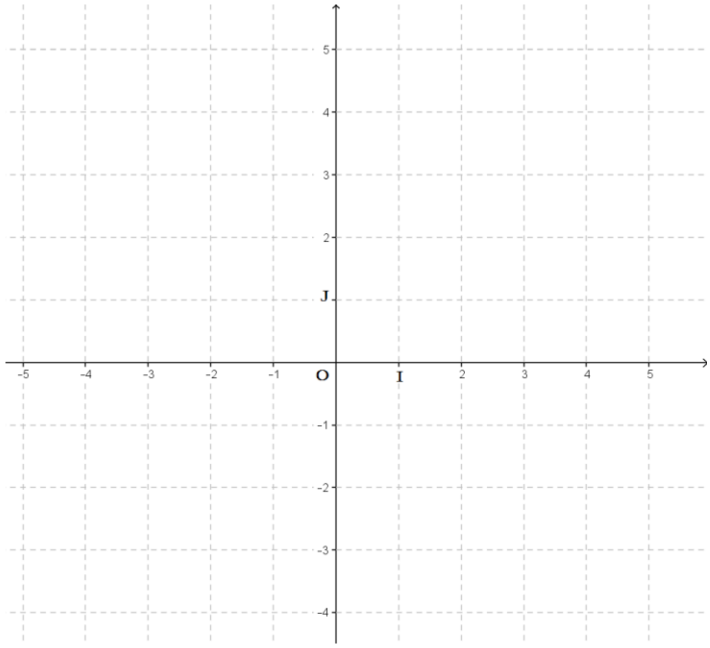
Soit (O; I, J) un repère du plan.

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.
- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- Pour tous réels k, k' et tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ $\qquad$ $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ $\qquad$ $1 \text{ x } \vec{u} = \vec{u}$

Exemples.



6.3 Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

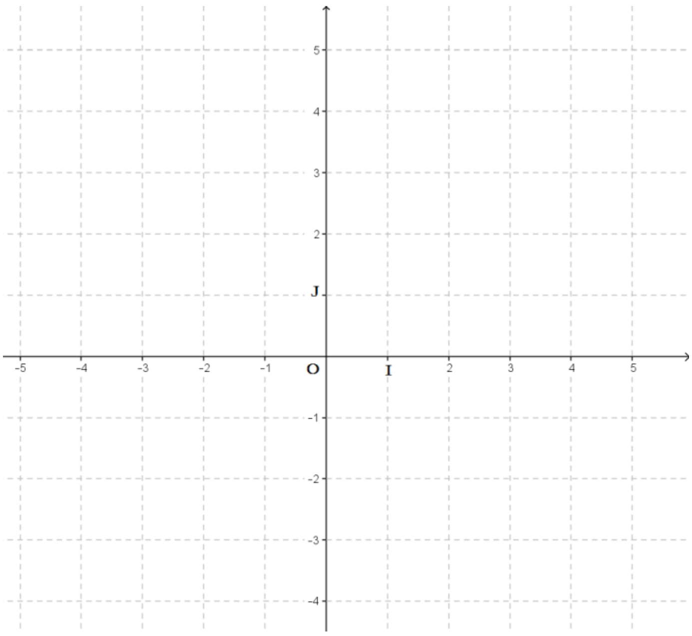
Propriété

Soit (O; I, J) un repère du plan.

Si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A\ ;\ y_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Retenir *extrémité* moins *origine*

Remarque. Ces coordonnées correspondent au déplacement horizontal, puis vertical pour aller de A à B (affectés de signes).



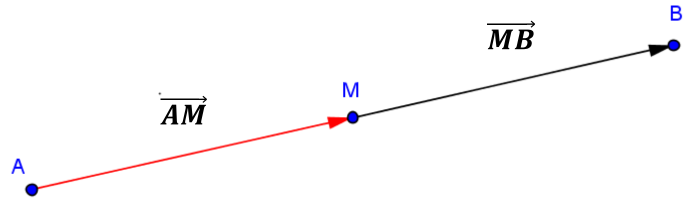
6.4 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soient A et B deux points distincts d'un plan.

Le point M est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Illustration.



Propriété

Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$.

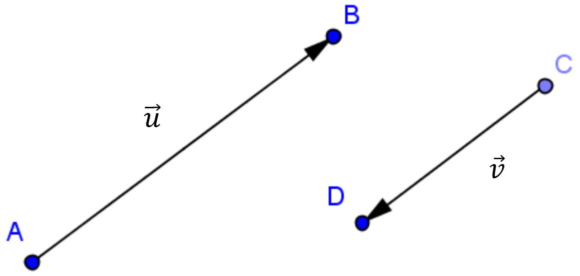
Si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$, alors le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Preuve.

7. Vecteurs colinéaires

7.1 Définition

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Remarque. Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

7.2 Premier théorème

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve.

7.3 Deuxième théorème (à admettre)

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $\exists\ k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

Remarques. 1) **Le symbole ∃ signifie « il existe ».**

2) Autre formulation :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\exists\ k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

7.4 Propriétés

Soit (O; I, J) un repère du plan.

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\, y' - x'y = 0$.

$\vec{u}$	x	y
$\vec{v}$	x'	y'

Preuve du deuxième point.

Trois exemples d'application des vecteurs en physique

Source : *Physique, Terminales C.E*, éditions Nathan 1989, de Guy Fontaine, Jean-Claude Paul et Adolphe Tomasino.

B - 2. Expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ s'obtient par dérivation :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j})}{\mathrm{d}t}$$

Et, puisque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs constants :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{j}$$

Par définition, on a : $\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}$.

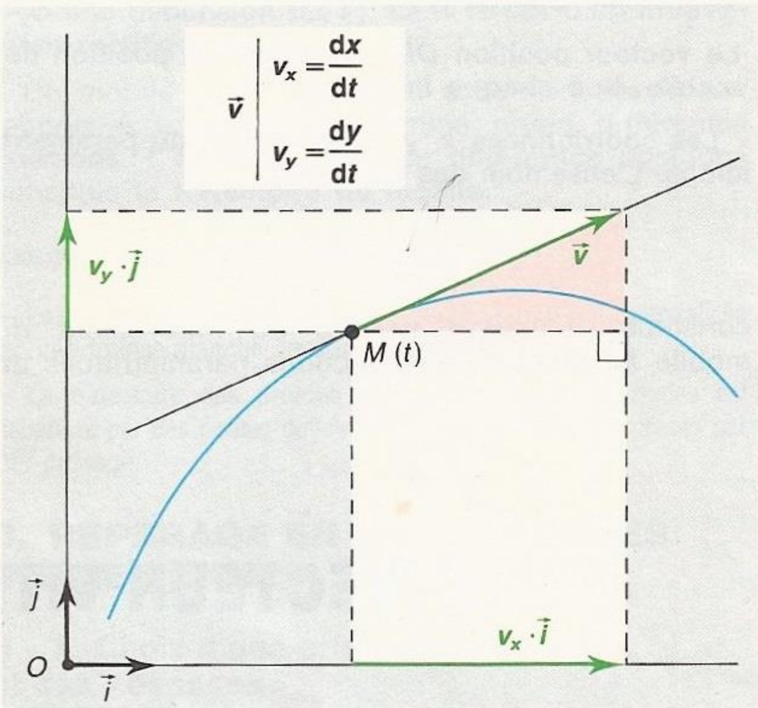


Fig. 13. **Le vecteur vitesse $\vec{v}$ à l'instant t :**
— il est tangent à la trajectoire;
— la valeur de v s'obtient grâce au théorème de Pythagore appliqué dans le triangle coloré en rouge :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ a donc pour coordonnées, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{v}\left(v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, ; \; v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\ \text{ou} \\ \vec{v}\,[v_x = x'(t) \, ; \; v_y = y'(t)] \end{array}}$$

4. LE PRINCIPE DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION

Il s'agit là encore d'une loi universelle de la Physique classique. Elle concerne deux corps en interaction, qu'ils soient **au contact ou qu'ils interagissent à distance,** qu'ils soient **immobiles ou en mouvement.**

A. ÉNONCÉ DU PRINCIPE

Il figure dans l'ouvrage de Newton précédemment cité, la traduction en est :

« À toute action est toujours opposée une réaction égale; c'est-à-dire que les actions réciproques que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales et dans des directions contraires. » (Pour *directions contraires*, comprendre *sens contraires*.)

De nos jours, on l'énonce de la manière suivante :

Si un corps *A* exerce sur un corps *B* une force $\vec{F}_{A \to B}$ (appelée *action*), simultanément le corps *B* exerce sur le corps *A* une force $\vec{F}_{B \to A}$ (dénommée *réaction*) et ces deux forces ont la même ligne d'action, des sens inverses et la même intensité.

Cela se traduit partiellement par l'égalité vectorielle :

$$\boxed{\vec{F}_{B \to A} = -\vec{F}_{A \to B}}$$

Bien entendu, les deux forces ont même intensité :

$$\boxed{F_{B \to A} = F_{A \to B}}$$

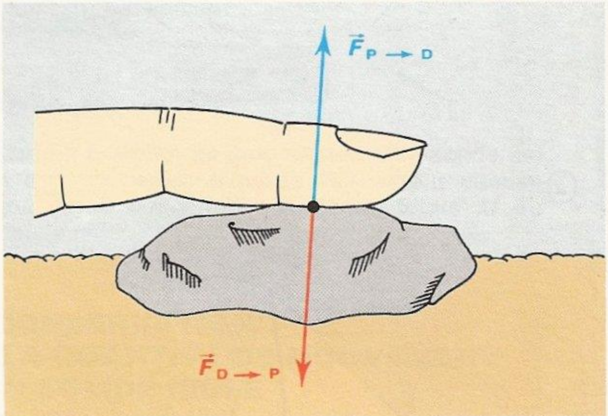


Fig. 7. **Le doigt et la pierre au contact :** exemple de Newton. Observez les forces $\vec{F}_{D \to P}$ et $\vec{F}_{P \to D}$. On a :

$$\vec{F}_{D \to P} = -\vec{F}_{P \to D}$$

Texte de Newton : *« Qu'on presse du doigt sur une pierre, ce doigt est aussi pressé par la pierre... »*

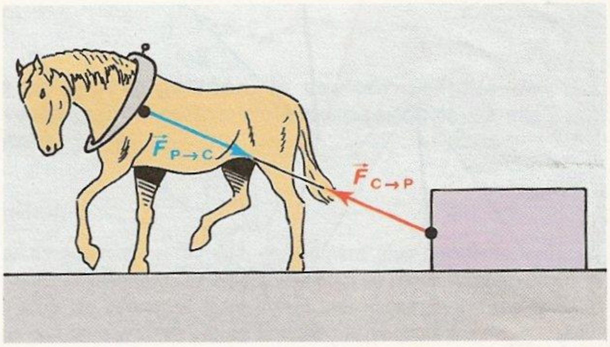


Fig. 8. **Le cheval et la pierre :** exemple de Newton. On considère ici qu'ils sont en interaction par l'intermédiaire de la corde. Identifiez les forces $\vec{F}_{C \to P}$ et $\vec{F}_{P \to C}$. On a :

$$\vec{F}_{P \to C} = -\vec{F}_{C \to P}$$

Texte de Newton : *« Si un cheval tire une pierre attachée à une corde, le cheval est aussi tiré en retour de manière égale par la pierre... »*

B. EXEMPLES D'APPLICATION

Prenons deux exemples cités par Newton (fig. 7 et 8) en illustration de la règle : *« Tout ce qui presse ou tire quelque chose est tout autant pressé ou tiré par cette autre chose ».*

B - 4. Inductance d'une bobine

Nous faisons le calcul de l'inductance L d'une bobine comportant **N spires,** de **surface S,** sur une **longueur** ℓ (fig. 8) en faisant l'hypothèse que la bobine est très longue de sorte que le champ magnétique créé est pratiquement uniforme à l'intérieur de la bobine (il n'existe des perturbations du champ qu'aux extrémités et elles sont négligeables). On dit alors que la bobine est assimilée à un *solénoïde théorique.*

Les conventions sont précisées à la figure 8; le flux propre à travers chaque spire est positif, puisque $\vec{B}$ et $\vec{S}$ ont même direction et même sens; ce flux vaut :

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \qquad (\text{car } \theta = 0)$$

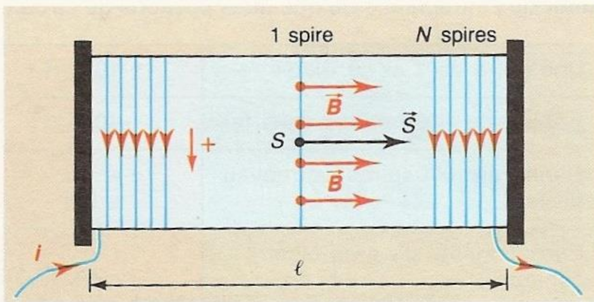


Fig. 8. **Calcul de l'inductance d'une bobine.** Vérifiez, à chaque fois avec l'observateur d'Ampère, le sens du champ magnétique $\vec{B}$ et celui du vecteur surface $\vec{S}$ (relatif à une spire).