# Intervalles

# Intersection et réunion de deux ensembles

## Le cours

## 1. Intervalles de $\mathbb{R}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. On pose :

$\mathbb{R} = ]-\infty\,;+\infty[$ $\quad$ $[a\,;+\infty[ = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x\}$ $\quad$ $]-\infty\,;a] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \leq a\}$

$]a\,;+\infty[ = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x\}$ $\quad$ $]-\infty\,;a[ = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < a\}$

$]a\,;\,b[ = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x < b\}$ $\quad$ $[a\,;\,b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x \leq b\}$

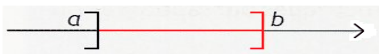
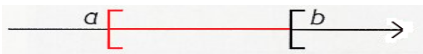
$[a\,;\,b[ = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x < b\}$ $\quad$ $]a\,;\,b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x \leq b\}$

Toute partie $I$ de $\mathbb{R}$ qui est de l'un des types précédents est appelée un ***intervalle*** (de $\mathbb{R}$).

**Remarque**. $+\infty$ se lit « plus l'infini » ; $-\infty$ se lit « moins l'infini ».

## 2. Représentation d'un intervalle sur une droite graduée

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

| L'intervalle noté … | est l'ensemble des réels $x$ **tels que** … | Représentation de cet intervalle sur une droite graduée |
|---|---|---|
| $[a\,;\,b]$ | $a \leq x \leq b$ |  |
| $]a\,;\,b[$ | $a < x < b$ |  |
| $]a\,;\,b]$ | $a < x \leq b$ |  |
| $[a\,;\,b[$ | $a \leq x < b$ |  |
| $[a\,;+\infty[$ | $a \leq x$ |  |
| $]a\,;+\infty[$ | $a < x$ |  |
| $]-\infty\,;a]$ | $x \leq a$ |  |
| $]-\infty\,;a[$ | $x < a$ |  |

## 3. Remarques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

1) On a $\emptyset = ]\,a\ ;\ a\,[ = ]\,a\ ;\ a\,] = [\,a\ ;\ a\,[$.

2) Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Alors $A$ est un intervalle si et seulement si $[\,a\ ;\ b\,] \subset A$ pour tous $a, b \in A$ tels que $a \leq b$.

3) Pour un intervalle de l'un des types $[\,a\ ;\ b\,]$, $]\,a\ ;\ b\,[$, $[\,a\ ;\ b\,[$, $]\,a\ ;\ b\,]$, on dit que $b - a$ est la *longueur* de l'intervalle.

## 4. Ouvert ou fermé ?

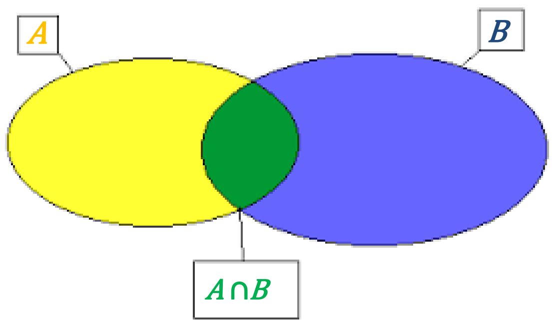
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

- On dit que $I$ est ***ouvert*** s'il est de l'un des types : $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $]\,a\ ;\ b\,[$, $]\,a\ ;+\infty\,[$, $]-\infty\ ;\ a\,[$.
- On dit que $I$ est ***fermé*** s'il est de l'un des types : $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $[\,a\ ;\ b\,]$, $[\,a\ ;+\infty\,[$, $]-\infty\ ;\ a\,]$.
- On remarquera que les seuls intervalles à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.
- L'intervalle $[-3\ ;\ 5\,[$ se lit « intervalle de $-3$ à $5$ fermé en $-3$ et ouvert en $5$ ».
- L'intervalle $]-3\ ;\ 5\,]$ se lit « intervalle de $-3$ à $5$ ouvert en $-3$ et fermé en $5$ ».

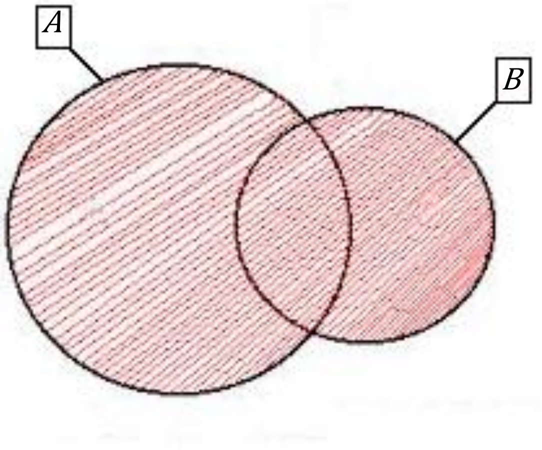
## 5. Intersection et réunion de deux ensembles

Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

L'**intersection** de $A$ et $B$, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à $A$ **et** à $B$.



La **réunion** de $A$ et $B$, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à $A$ **ou** à $B$.




**Remarques**. 1) $A \cap B$ se lit « *A inter B* ».

2) $A \cup B$ se lit « *A union B* ».

3) Soit $E$ l'ensemble des réels $x$ vérifiant : $x \leq 3$ ou $x > 4$.

Alors $E = \{ x \in \mathbb{R} \, ; \; x \leq 3 \textbf{ ou } x > 4\} = ]-\infty \, ; \; 3] \cup ]4 \, ; +\infty[$.

Cet ensemble $E$ n'est pas un intervalle.